Автоматика и телемеханика, № 4, 2025

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2025 г. Д.Е. ШАПОШНИКОВ, канд. физ.-мат. наук (shaposhnikov@unn.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

МИНИМАКСНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ УЧЕТА КАЧЕСТВЕННЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ПРИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ

Поддержка принятия решений в аналитических системах на основе использования больших данных предполагает формирование интегральных оценок объектов по всему множеству параметров или некоторому их подмножеству. В статье рассматривается проблема получения многокритериальной (многопараметрической) оценки объектов и подход, который предполагает использование весовых коэффициентов важности при наличии качественной и, возможно, неполной информации об относительной важности тех или иных частных критериев. Рассматривается фундаментальный принцип возможности различных количественных оценок относительной предпочтительности частных критериев для различных объектов популяции при сохранении системы предпочтений всего множества объектов. Используемый подход предполагает, что лицо, принимающее решение, формулирует качественную информацию об относительной предпочтельности частных критериев в виде необязательно полного графа предпочтений. Для каждого объекта весовые коэффициенты рассчитываются автоматически по принципу гарантированного результата путем решения оптимизационной задачи с использованием обобщенных логических критериев максимального риска и максимальной осторожности. Для частных случаев систем предпочтений приведены аналитические соотношения и алгоритмы расчета весовых коэффициентов. Данная методика обеспечивает использование дополнительной качественной информации о предпочтениях тех или иных критериев, получение численных значений весовых коэффициентов значимости и решение задачи многокритериальной оценки на основе принципа гарантированного результата.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, многокриториальная оценка, интерактивная процедура, весовые коэффициенты важности, качественная информация и предпочтительности.

DOI: 10.31857/S0005231025040075, **EDN:** CAMJHV

1. Введение

Задачи многокритериальной оценки широко распространены в различных сферах деятельности и в различных предметных областях. Под проблемой оценки в данном случае понимается необходимость получения интегральной оценки объектов совокупности для последующего окончательного выбора лицом, принимающим решение. Объективная сложность таких задач заключается в невозможности достижения наилучших значений по всем критериям одновременно и в выборе компромиссного решения, т.е. решения, которое невозможно улучшить ни по одному из критериев, не ухудшив значения остальных. Одним из наиболее распространенных подходов к решению таких задач является формирование численной оценки значения для каждого допустимого решения и, следовательно, решение однокритериальной задачи оптимизации или, в случае дискретного множества допустимых решений, задачи выбора [1].

Известны подходы к задаче многокритериального выбора, учитывающие качественную информацию о предпочтениях лиц, принимающих решения (ЛПР) [2]. Основной особенностью данных методов является требование к ЛПР вводить достаточно большое количество необходимых параметров (точных числовых значений), отсутствие (хотя бы частичное) которых делает применимость этих методов невозможной. Описанная методика предполагает использование ровно того объема информации, который лицо, принимающее решения, готово предоставить (в конкретном случае – отсутствие таковой вообще) [3].

Одним из наиболее распространенных методов решения многокритериальных задач является использование обобщенного критерия оптимальности, включающего веса важности, отражающие представление лица, принимающего решение, об относительной важности тех или иных критериев оптимальности [2]. Важность критериев здесь понимается в смысле аксиоматической теории важности, которая позволяет предположить, что если имеется дополнительная информация вида “i-й критерий предпочтительнее j-го критерия ($Q_i \succ Q_j$)”, то для весовых коэффициентов должно выполняться соотношение $w_i > w_j$. При этом, конечно, лицу, принимающему решение, требуются точные численные значения весовых коэффициентов.

Весовые коэффициенты относительной важности частных критериев могут быть назначены лицом, принимающим решение, различными способами [4]. Все известные методы индивидуальной экспертизы требуют от лица, принимающего решение (или эксперта), полных и точных ответов (чаще всего с численными оценками) на вопросы, которые задает выбранный метод. Описанный подход позволяет использовать неполную и/или качественную информацию о предпочтениях тех или иных критериев.

2. Постановка задачи многокритериальной оценки

В общем виде задачу многокритериального выбора можно сформулировать следующим образом.

ЛПР сформировал набор некоторого числа допустимых альтернатив, из которых ему (ЛПР) необходимо сделать единственный и окончательный выбор. Выбор осуществляется как отбор некоторого подмножества альтернатив (в частном случае одной альтернативы) таких, что ЛПР считает их наилучшими и равноценными друг другу по наилучшему качеству.

Также на практике рассматривается и решается задача многокритериальной оценки вариантов, в результате которой ЛПР стремится упорядочить варианты по предпочтению для дальнейшего анализа. Очевидно, что данная задача (формирование итоговой оценки) является обобщением предыдущей задачи (задачи выбора) и не противоречит практике.

Традиционно рассматриваются следующие компоненты модели принятия решений:

— исходный набор вариантов (решений, альтернатив), из которых осуществляется выбор;

— принцип оптимальности, на основе которого выбирается наилучший вариант (или наилучшие варианты);

— лицо, принимающее решение (ЛПР), определяющее процесс поиска решения, а также эксперты и консультанты, которые ему в этом помогают.

Не ограничивая общности математической формулировки, будем считать, что множество допустимых решений представляет собой дискретный конечный набор альтернатив, каждая из которых обозначается числом

$$D = \{1, \ldots, m\}\,. \tag{1}$$

Задача выбора заключается в выборе варианта $x^* \in D = \{1, \ldots, m\}$, который является наилучшим (оптимальным) с точки зрения лица, принимающего решение.

Поскольку в большинстве практических случаев в задачах многокритериального выбора оптимального решения не существует, применим термин «рациональное решение», который означает наличие понятных другим людям рациональных причин, приведших к выбору данного решения из множества допустимых.

Многие подходы к решению задач многокритериального выбора предполагают использование задачи оценки [3]. Задача оценки заключается в определении для каждой альтернативы числового значения, характеризующего качество (полезность, эффективность и т.д.) этого варианта с точки зрения предметной области и с точки зрения относительной важности частных критериев в соответствии с индивидуальным мнением ЛПР. При этом для сопоставимости альтернатив эта обобщенная характеристика должна иметь направление и масштаб.

В дальнейшем будем считать, что шкалы измерения частных критериев оптимальности определены и численное значение оценки по варианту может быть получено для каждого варианта и каждого критерия.

Также будем считать, что все частные критерии приведены к безразмерному виду и к единой шкале измерений $[\alpha, \beta]$, при этом $0 \leqslant \alpha < \beta$.

Общая идея оценки заключается в построении скалярной функции $F(Q(x))$, обладающей свойством упорядочивать исходные варианты в соответствии с их предпочтением. Процедура построения такой функции называется сверткой или объединением векторного критерия оптимальности (как вариант сверткой или объединением частных критериев):

$$\min_{x\in D} Q_1(x), \quad \min_{x\in D} Q_2(x), \quad \cdots \quad \min_{x\in D} Q_n(x), \tag{2}$$

где

$$D = \{1, \ldots, m\}, \tag{3}$$

преобразовывается в однокритериальную (скалярную) задачу

$$\min_{x\in D} \{F\left(Q_1(x), \ldots, Q_n(x)\right)\}. \tag{4}$$

Функция $F(\cdot)$ называется обобщенным критерием оптимальности задачи (2). Для учета относительной важности частных критериев используются веса относительной важности $w = (w_1, \ldots, w_n)$. В качестве обобщенного критерия могут использоваться различные функции, в частности обобщенные логические критерии оптимальности:

критерий «максимальной осторожности»

$$F_{L_{\min}}\left(w, Q_1(x), \ldots, Q_n(x)\right) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} (w_i Q_i(x)), \tag{5}$$

критерий «максимального риска»

$$F_{L_{\max}}(w, Q_1(x), \ldots, Q_n(x)) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} (w_i Q_i(x)). \tag{6}$$

Весовые коэффициенты $w_j, j = 1, \ldots, n$, отражают точку зрения ЛПР на относительную важность частных критериев оптимальности. Важность критериев здесь понимается в смысле аксиоматической теории важности, которая позволяет предположить, что если дополнительная информация вида «i-й критерий не менее важен, чем j-й критерий ($Q_i \succeq Q_j$)», то для весовых коэффициентов и справедливо следующее соотношение:

$$Q_i \succeq Q_j \Leftrightarrow w_i \geqslant w_j. \tag{7}$$

Опять же для решения исходной задачи выбора требуется точное задание весовых коэффициентов важности в числовой форме. При этом обычно предполагается, что весовые коэффициенты важности принадлежат области допустимых значений следующего вида (далее будем называть ее областью допустимых значений весовых коэффициентов):

$$D_w^0 = \left\{ w \in R^n |\ w_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}. \tag{8}$$

Известно, что выбор весовых коэффициентов важности частных критериев в строгом соответствии с (8) может привести к определенной проблеме: если для некоторого частного критерия Q_i значение соответствующего весового коэффициента важности равно нулю (что не противоречит построению области D_w), то этот критерий, по сути, будет вычеркнут из рассмотрения и не будет иметь значения его численная величина. Математически это приведет к слабой эффективности получаемых решений (доказательство в [5]).

Кроме того, известно, что сумма весов важности может быть любым положительным числом (например, равной 100, если удобно работать в процентной терминологии).

Таким образом, в итоге приходим к следующей формулировке области допустимых значений весовых коэффициентов важности w:

$$D_w^1 = \left\{ w \in R^n | \, w_i \geqslant w_0 > 0, \; i = 1, 2, \ldots, n; \; \sum_{i=1}^{n} w_i = R \right\}. \tag{9}$$

Для решения исходной задачи выбора лицу, принимающему решение, необходимо назначить точные значения весов важности в числовой форме из области допустимых значений.

Подходы и методы назначения весовых коэффициентов широко описаны в литературе. Среди них следующие [6]:

— упорядочение критериев по важности;

— определение соотношения весовых коэффициентов, при этом лицо, принимающее решение, указывает соотношение w_i/w_j в числовой форме;

— построение таблиц на основе попарного сравнения критериев по важности;

— метод определения весов с помощью набора последовательных сравнений (метод Черчмена–Акоффа);

— методы, использующие информацию о качестве оптимальных значений частных критериев;

— теоретико-игровые методы назначения весовых коэффициентов и др.

Эти методы имеют ряд существенных недостатков в практическом применении.

1. Утверждение (7) подразумевает «переход» от качественной информации ($Q_i \succeq Q_j$) к количественной информации ($w_i \geqslant w_j$). Очевидно, что это большая неопределенность, которая в конечном итоге приведет к разным решениям.

2. Все перечисленные методы назначения численных значений весовых коэффициентов важности являются последовательными алгоритмами, требующими от лица, принимающего решение, точной количественной информации на каждом шаге этого алгоритма. Как только лицо, принимающее решение, отказывается отвечать на очередной вопрос, весь алгоритм завершается и численные значения w не вычисляются.

3. Анализ и использование качественной информации об относительной важности конкретных критериев оптимальности – минимаксный подход

В ряде работ [6, 7] сформулированы основная идея и концепция данного подхода, которые заключаются в следующем.

1. Предполагается, что при использовании обобщенных критериев оптимальности с весовыми коэффициентами важности их значения могут быть разными для каждого допустимого решения области D.

2. Лицо, принимающее решение, может формулировать предпочтения на множестве частных критериев в виде набора отношений, не обязательно для всех возможных пар частных критериев.

3. Значения весов важности вычисляются автоматически на основе принципа гарантированного результата, т.е. для каждого допустимого решения определяется такой набор $w \in D_w$, который обеспечивает «наихудшее» значение обобщенного критерия для всех возможных значений весовых коэффициентов.

Рассмотрим более подробно частный, но часто встречающийся случай, когда лицо, принимающее решение, устанавливает для некоторых L пар частных критериев (не обязательно для всех C_n^2 возможных пар) взаимное предпочтение i-го частного критерия над j-м на всем множестве D допустимых решений:

$$e_l = \{Q_i \succeq Q_j\}, \quad l = 1, \ldots, L \leqslant \frac{n(n-1)}{2}. \tag{10}$$

Информация (10) является качественной, так как из нее следует, что критерий i важнее критерия j, но невозможно сказать, насколько или во сколько раз. Тогда, принимая во внимание соотношение (10), диапазон допустимых значений весовых коэффициентов важности D_w, определяемый как (8), сужается согласно соотношениям, введенным лицом, принимающим решения:

$$D_w^2 = \left\{ w \in R^n \;\middle|\; \begin{array}{l} w_i \geqslant w_0 > 0,\ i = 1, \ldots, n; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i = R; \\ \langle w_i \geqslant w_j \rangle_{e_l},\ l = 1, \ldots, L \end{array} \right\}. \tag{11}$$

В некоторых случаях лицо, принимающее решение, имеет возможность уточнить информацию о взаимосвязи весовых коэффициентов w_i и w_j, связанных с бинарным отношением $\{Q_i \succeq Q_j\}$, используя параметр $g_l \geqslant 1$:

$$D_w^3 = \left\{ w \in R^n \;\middle|\; \begin{array}{l} w_i \geqslant w_0 > 0,\ i = 1, \ldots, n; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i = R; \\ \langle w_i \geqslant g_l w_j \rangle_{e_l},\ l = 1, \ldots, L \end{array} \right\}. \tag{12}$$

В ряде работ [7–10] был предложен и развит подход, в котором весовые коэффициенты важности частных критериев являются неконтролируемыми факторами и их значения могут быть разными для разных альтернатив.

Иногда в процессе принятия решений целесообразно учитывать зависимость весовых коэффициентов от значения частного критерия в каждой точке области допустимых решений. Предполагая, что ЛПР не может точно определить численные значения весовых коэффициентов w, можно рассматривать их как неконтролируемые факторы и, применяя принцип гарантированного результата, перейти к следующей модели принятия решений:

$$x^* = \arg\min_{x\in D}\max_{w\in D_w^3} F(q(x), w), \tag{13}$$

где

$$D = \{1, \ldots, N_D\}, \tag{14}$$

$$D_w^3 = \left\{ w \in R^n \;\middle|\; \begin{array}{l} w_i \geqslant w_0 \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n; \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = R; \\ \langle w_i \geqslant g_l w_j \rangle_{e_l},\ l = 1, \ldots, L \end{array} \right\}. \tag{15}$$

4. Представление качественной информации в виде графа

Качественную информацию о предпочтениях эксперта можно представить в виде ориентированного графа $G(V, E)$, где V – множество вершин, соответствующих частным критериям, E – множество ребер, соединяющих i-ю вершину с j-ой вершиной тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $(Q_i \succeq Q_j)$.

В дальнейшем будем предполагать, что информационные сообщения (7) удовлетворяют условию транзитивности, т.е. в графе $G(V, E)$ нет замкнутых циклов. Разобьем множество I вершин графа на слои (ярусы) следующим образом:

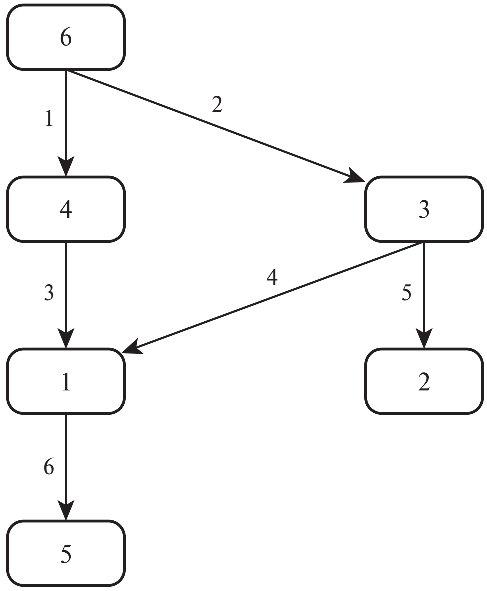
— к первому слою $(s = 1)$ относятся все вершины, не включающие ни одной дуги;

— ко второму слою $(s = 2)$ – те и только те вершины, включающие дуги из вершин первого яруса;

— к третьему слою $(s = 3)$ – те и только те вершины, включающие дуги из вершин первого и второго ярусов и т.д.

В этом случае вершины последнего слоя $(s = S \leqslant N)$ не будут иметь ни одной исходящей дуги.

В частном случае отсутствия качественной информации (7) граф $G(V, E)$ будет представлять собой совокупность N изолированных вершин. А в частном случае линейного упорядочения частных критериев граф $G(V, E)$ будет иметь число слоев, равное числу вершин $(S = n)$.



Пример графа предпочтений.

В качестве примера рассмотрим граф предпочтений (рисунок), содержащий шесть вершин (критериев) и дополнительную качественную информацию, введенную лицом, принимающим решения: $e_1 = \{Q_6 \succeq Q_4\}$, $e_2 = \{Q_6 \succeq Q_3\}$, $e_3 = \{Q_4 \succeq Q_1\}$, $e_4 = \{Q_3 \succeq Q_1\}$, $e_5 = \{Q_3 \succeq Q_2\}$, $e_6 = \{Q_1 \succeq Q_5\}$.

Для каждой вершины графа $v_i \in \{1, \ldots, n\}$, соответствующей частному критерию Q_i, введем следующие обозначения: V_i – множество вершин графа $G(V, E)$, из которых есть путь в вершину i, включая ее саму; n_i – мощность множества V_i.

Пусть p – произвольный путь в графе $G(V, E)$: $p = \{l_1, \ldots, l_n(p)\}$, где $l_i \in E$ – дуга, входящая в путь p; $n(p)$ – число дуг в пути p. Обозначим через P_i^k множество всех путей из вершины i в вершину k. Затем введем величины $\bar{g}_k^i$ и $\bar{\bar{g}}_i$ следующим образом:

$$\bar{g}_k^i = \begin{cases} \max\limits_{p \in P_i^k} \prod\limits_{l \in p} g_l, & P_i^k \neq \emptyset, \\ 1, & P_i^k = \emptyset \end{cases} \tag{16}$$

для всех $i, k \in E$;

$$\bar{\bar{g}}_i = \max_{k \in E, k \neq i} \overline{g}_k^i. \tag{17}$$

Очевидно, что $\bar{\bar{g}}_i$ является обобщенной оценкой относительной важности частного критерия i в условиях качественной информации (10). Ниже приведен пример расчета этих величин для графа, представленного на рисунке. Для всех дуг графа назначим коэффициенты уточнения g_l, $l = 1, \ldots, 6$ (табл. 1).

Таблица 1. Пример уточняющих коэффициентов

Номер дуги l	Коэффициент g_l
1	1,2
2	1,3
3	1,0
4	1,5
5	1,3
6	2,0

Расчет значений (16) и (17) для всех вершин графа приведен в табл. 2.

Таблица 2. Пример вычисления численных значений характеристик вершин

Вершина i	Значение $\bar{g}_i^k (P_i^k \neq \emptyset)$	$\bar{\bar{g}}_i$
1	$\bar{g}_1^5 = 2{,}0$	2,0
2	–	1,0
3	$\bar{g}_3^5 = 2{,}0 \times 1{,}5 = 3{,}0$; $\bar{g}_3^2 = 1{,}3$	3,0
4	$\bar{g}_4^5 = 1{,}5 \times 1{,}0 = 1{,}5$	1,5
5	–	1,0
6	$\bar{g}_6^5 = \max\{1{,}2 \times 1{,}0 \times 2{,}0; 1{,}3 \times 1,5 \times 2,0\} = 3{,}9$; $\bar{g}_6^2 = 2{,}0 \times 1{,}3 = 2{,}6$	3,9

Алгоритм 1.

1. Полагаем $s = S$; $\bar{g}_i^k = 0$, $i, k \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Для всех вершин i слоя s полагаем $\bar{\bar{g}}_i = 1$.

3. Полагаем $s = s - 1$. Если $s = 0$ (т.е. все слои пройдены), переход на шаг 5, иначе переход на шаг 4.

4. Для каждой вершины k, принадлежащей слою s, производятся следующие вычисления. Пусть J_k является множеством вершин слоя $(s+1)$, в которые есть дуга из вершины k. Тогда для каждой вершины $j \in J_k$ полагаем:

$$\bar{g}_i^k = g_l, \text{ где } l \text{ – номер дуги } (k, j) \text{ в графе } G(V, E);$$

$$\bar{g}_k^i = \max_{j \in J_k} \left\{ \bar{g}_k^j; \bar{g}_j^i \right\}, \quad i \neq j;$$

$$\bar{\bar{g}}_k = \max_{j \in J_k} \left\{ \bar{g}_k^j; \bar{\bar{g}}_k \right\}$$

и переход к шагу 3.

5. Для всех $\bar{g}_i^k$, для которых $\bar{\bar{g}}_k = 0, k, i \in \{1, \ldots, n\}$, полагаем $\bar{g}_i^k = 1$. Конец алгоритма.

5. Вычисление весовых коэффициентов важности для обобщенного критерия максимальной осторожности

5.1. Общий случай

Рассмотрим решение задачи расчета весовых коэффициентов важности $w \in D_w^4$ с использованием обобщенного логического критерия «максимальной осторожности»:

$$x^* = \arg\min_{x \in D} \max_{w \in D_w} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} F(q(x), w). \tag{18}$$

$$D_w^1 = \left\{ w \in R^n \;\middle|\; \begin{array}{l} w_i \geqslant w_0 \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = R; \\ \langle w_i \geqslant g_l w_j \rangle_{e_l}, \quad l = 1, \ldots, L \end{array} \right\}. \tag{19}$$

При фиксированных значениях переменных параметров $x \in D$ значения векторного критерия $q(x)$ являются определенными.

Применяя линейную модель для определения смешанных стратегий в матричной игре с нулевой суммой [12], в общем случае решение задачи (18)–(19) можно получить, решив следующую задачу линейной оптимизации:

$$\max v, \tag{20}$$

где

$$D_w = \left\{ w \in R^n \;\middle|\; \begin{array}{l} w_i \geqslant w_0 \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = R; \\ \langle w_i \geqslant g_l w_j \rangle_{e_l}, \quad l = 1, \ldots, L; \\ w_i q_i(x) \geqslant v, \quad i = 1, \ldots, n \end{array} \right\}. \tag{21}$$

Рассмотрим пример расчета весовых коэффициентов. Предположим, что в табл. 3 приведены значения частных критериев оптимальности для одного допустимого решения, нормированные на интервал $[0, 1]$. В этой же таблице приведены и рассчитанные весовые коэффициенты.

Таблица 3. Пример рассчитанных значений весовых коэффициентов важности для допустимого решения

Частные критерии	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6
Значения частных критериев q_i	0,1	1,0	0,5	0,3	0,9	0,3
Весовые коэффициенты w_i	0,1766	0,1767	0,2650	0,1767	0,0196	0,3445

Приведенное выше решение задачи расчета весовых коэффициентов важности частных критериев получено с использованием программного пакета LPSolv [13].

Приведенное выше решение получено путем решения линейной оптимизационной задачи симплекс-методом. Для частных случаев качественной информации о предпочтениях и, следовательно, области допустимых значений весовых коэффициентов важности расчет значений коэффициентов может быть осуществлен более быстрыми алгоритмами.

5.2. Вычисление весовых коэффициентов в частных случаях

Рассмотрим решение задачи расчета весовых коэффициентов важности $w \in D_w^2$ (11) с использованием обобщенного логического критерия «максимальная осторожность»:

$$x^* = \arg\min_{x \in D} \max_{w \in D_w} F(q(x), w), \tag{22}$$

$$D_w^1 = \left\{ w \in R^n \;\middle|\; \begin{array}{l} w_i \geqslant w_0 \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = R; \\ \langle w_i \geqslant w_j \rangle_{e_l}, \quad l = 1, \ldots, L \end{array} \right\}. \tag{23}$$

Для расчета значений весовых коэффициентов важности w в случае условия их неотрицательности, т.е. для случая $w_0 = 0$, можно применить алгоритм 2.

Алгоритм 2.

1. Граф $G(V, E)$ разбивается на слои.

2. Каждой вершине j графа $G(V, E)$, $j = 1, \ldots, n$, присваиваются начальные значения $w'_j = 0$.

3. В качестве текущего слоя рассматриваем самый нижний слой: $s = S$.

4. Полагаем $w'_j = \max\left\{w'_j, R/q_j(x)\right\}$ для всех вершин j слоя s.

5. Корректируются значения w'_j вершин вышележащих слоев:

$$w'_j = \max\left\{w'_j, \max_{k \in V_j} w'_k\right\},$$

V_j – множество вершин, из которых есть путь в вершину j.

6. Полагаем $s = s - 1$. Если $s = 0$, т.е., все вершины пройдены, переход к шагу 7. Иначе вычисления повторяются с шага 4.

7. Вычисляются значения весовых коэффициентов:

$$w_j^* = \frac{R w'_j}{\sum_{i=1}^{n} w'_i}.$$

Конец алгоритма.

Рассмотрим обобщение экстремальной задачи (22)–(23) для случая $w_0 \geqslant 0$. Для решения этой задачи можно применить алгоритм 3.

Алгоритм 3.

1. Полагаем $V' = V = \{1, \ldots, n\}$; $R' = R$; $E' = E$.

2. Применяем алгоритм 2 для графа $G(V, E)$ с параметрами $R = R'$ и получаем значения w'_j.

3. Если для всех $j \in V'$ выполняется $w'_j \geqslant w_0$, тогда полагаем $w^*_j = w'_j$, $j \in V'$ и задача решена. Иначе переход на п. 4.

4. Для всех вершин $m \in V'$, для который выполняется $w'_m < w_0$, производятся следующие действия:

– полагаем $w'_m = w_0$; $R' = R' - w_0$;

– исключаем вершину m из рассмотрения, для этого полагаем $V' = V' \setminus m$ и исключаем из множества E' дуги, инцидентные вершине m, если таковые есть.

5. Вычисления повторяются с шага 1.

Доказательство корректности вышеприведенных алгоритмов содержится в [6].

6. Вычисление весовых коэффициентов важности для обобщенного критерия максимального риска

Рассмотрим решение задачи расчета весовых коэффициентов важности $w \in D^4_w$ (6) с использованием обобщенного логического критерия «максимального риска»:

$$x^* = \arg \max_{w \in D_w} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} F(q(x), w), \tag{24}$$

$$D_w = \left\{ w \in R^n \;\middle|\; \begin{array}{l} w_i \geqslant w_0 \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i = R; \\ \langle w_i \geqslant g_l w_j \rangle_{e_l}, \quad l = 1, \ldots, L \end{array} \right\}. \tag{25}$$

При фиксированных значениях переменных параметров $x \in D$ значения векторного критерия $q(x)$ также определены.

Оптимальным решением задачи оптимизации (24)–(25) является вектор w^*, имеющий компоненты:

$$w^*_i = \begin{cases} \dfrac{(R' \bar{g}^r_i)}{\sum_{k \in V_r} \bar{g}^r_k} + \bar{\bar{g}}_i w_0, & i \in V_r; \\ \bar{\bar{g}}_i w_0, & i \notin V_r, \end{cases} \tag{26}$$

где

$$R' = R - w_0 \sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{g}}_i \geqslant 0, \tag{27}$$

значения $\bar{g}_i^r$ и $\bar{\bar{g}}_i$ определяются из соотношений (16) и (17) соответственно; V_i – множество вершин графа $G(V,E)$, из которых есть путь в вершину i, включая саму вершину; n_i – мощность множества V_i, значение r получается из соотношений:

$$y_r = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} y_k, \tag{28}$$

$$y_k = \max_{i \in V_k} \left(q_i(x) \left(\frac{(R' \bar{g}_i^r)}{\sum\limits_{j \in V_r} \bar{g}_j^r} + \bar{\bar{g}}_i w_0 \right) \right). \tag{29}$$

Доказательство формул (24)–(29) приведено в [11].

7. Заключение

Рассмотрена методика расчета весовых коэффициентов важности частных критериев при решении задач многокритериального выбора и оценки альтернатив. Фундаментальный принцип возможных различных значений весовых коэффициентов важности при постоянной системе качественных предпочтений позволяет лицу, принимающему решение, формулировать предпочтения в виде ориентированного графа, который в случае полноты представляет собой отношение строгого порядка. Данная методика может быть использована как при построении интерактивных систем принятия решений, так и для сведения многокритериальной задачи к однокритериальной для использования в различных методах оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hillier F.S., Lieberman G.J.* Introduction to operations research / 7th ed. McGraw-Hill Higher Education, 2001. ISBN 0-07-232169-5.
2. *Steuer R.E.* Multiple Criteria Optimization: Theory, Computations, and Application. New York: John Wiley Sons, 1986.
3. *Батищев Д.И.* Методы оптимального проектирования. М.: Радио и связь, 1984.
4. *Matthias Ehrgott.* Multicriteria Optimization. Springer, 2005. ISBN 3-540-21398-8.
5. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
6. *Батищев Д.И., Шапошников Д.Е.* Многокритериальный выбор с учетом индивидуальных предпочтений. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1994.
7. *Batishchev D., Anuchin V., Shaposhnikov D.* The Use of the Qualitative Information on the Importance of Particular Criteria for the Computation of Weighting Coefficients / Multiobjective Problems of Mathematical Programming. Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems. V. 35. Springer-Verlag, 1991.

8. *Shaposhnikov D., Makarova J.* Multicriteria Problem of Wireless System Design Using Tricriteria Approach with Qualitative Information on the Decision Maker's Preference / Balandin D., Barkalov K., Gergel , V., Meyerov I. (eds). Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2020. Communications in Computer and Information Science, V. 1413. Springer, Cham.

9. *Makarova J., Shaposhnikov, D.* Bicriterial problem of finding filter parameters using qualitative information on frequency interval preferences // Proceedings of the XXVI International Scientific and Technical Conference "Information Systems and Technology – 2020". NSTU, Nizhni Novgorod, 2020. P. 836—847.

10. *Shaposhnikov D., Makarova, J.* Multicriteria problem of calculation of wireless system parameters using qualitative information on the desicion maker's preference // Proceedings of the XX International Conference "Mathematical modeling and supercomputer technologies", pp. 16–21. NNSU Publishing House, Nizhni Novgorod, 2020.

11. *Шапошников Д.Е., Костина И.В.* Применение обобщенного логического критерия для аппроксимации области эффективности в многокритериальных задачах оптимизации // Инженерный вестник Дона. 2014. № 4 / Электронный журнал: *ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2552*.

12. *Neumann J., Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behavior. Princeton, N.J. Princeton University Press, 1953.

13. https://sourceforge.net/projects/lpsolve/

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 29.11.2024

После доработки 11.01.2025

Принята к публикации 14.01.2025